نظرية ذات الحدّين

الكاتب: عمر عبد السلام أبوستة، مصراتة \ ليبيا.

تحليل المقدار الثنائي:

المقدار الثنائي أو ثنائي الحد، هو أي مقدار يتكوّن من حدّين، مرفوع إلى أس مُعيّن، وتكون صيغته العامّة:

$$(أ + ب)^{س}$$

وبتحليل هذا المقدار؛ نقصد أننا سنحوّله إلى أي صيغة أخرى يمكننا الحصول عليها، قد تفيدنا في تطبيقات معينة. ولإيجاد أي صيغة أخرى قد تساوي هذا المقدار، سوف نفرض أوّلا قيم للأس، ثم نحاول تحليل كلا منها كالتالي:

$$(أ + ب)^{0} = 1$$

أيُّ قيمة مرفوعة للأس صفر تساوي واحدا، وليس هذا موضع مناقشة ذلك ذلك.

$$(أ + ب)^{1} = أ + ب$$

$$(أ + ب)^{2} = (أ + ب)\ (أ + ب)$$

هنا لحل هذه المشكلة؛ نلجأ إلى التمثيل البياني لها، وأفضل تمثيل بيانيّ لحاصل ضرب مقدارين هو المساحة؛ كما في الشكل (1-1)، ثمّ بمعلوميّة أنّ طول الضلع يساوي أ + ب، يمكننا أن نفرض جزء مُعيّن من طوله على أنّه أ، والآخر على أنّه ب، كما في (2)، عندها يمكن تقسيم الشكل إلى عدّة مربّعات، ومجموع مساحات تلك المربعات يساوي المساحة الكليّة، فعندها يكون:

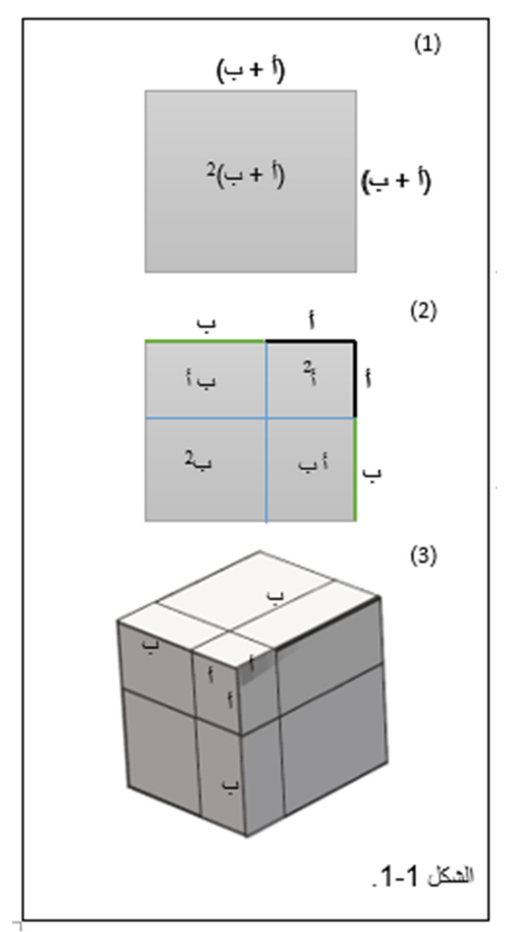
$$(أ + ب)^{2} = أ^{2} + 2أب + ب^{2}$$

الآن ننتقل إلى:

$$(أ + ب)^{3} = (أ + ب)^{2}\ (أ + ب)$$

فيمكن تمثيلها بيانيّا على أنّها حجم مُكعّب، كما في (3). وعند تقسيم الأضلاع بنفس الطريقة نحصل على ثمانية منشورات صغيرة داخل المكعّب الكبير، مجموع حجوم تلك المنشورات يساوي حجم المكعّب الكبير؛ تخيّل أنّ طول قلمك هو (أ + ب)، وافرض أنّ طول جزء منه أ، والباقي ب، ثم اركزه بشكل عمودي على أحد زوايا المربّع في (2)، فسوف يكون قلمك هو الارتفاع، هل تخيّلت المكعّب المتكوّن وداخله ثمان منشورات صغار؟ اجمع حجوم تلك المكعّبات، وسوف تجد أنّ:

$$(أ + ب)^{3} = أ^{3} + 3\ أ^{2}ب + 3\ أ\ ب^{2} + ب^{3}$$



الشكل 1-1.

الآن ننتقل إلى الأس التالي:

(أ + ب)^{4} = (أ + ب)^{3} (أ + ب)

أها، هنا لم تعد تنفع طريقة التمثيل البياني، أو أنّها في غاية الصعوبة على الأقل، فما بالك لو أردنا تحليل مقدار مرفوع لأس أكبر. ولكن الآن بما أنّنا استنتجنا بالفعل مفكوك أربعة مقادير ثنائية؛ يمكننا محاولة فهم الصيغة العامّة التي تحكم تلك الحدود، فإذا تأمّلت المفكوكات التي تحصلنا عليها، ستلاحظ أنّها ليست إلا حاصل جمع مجموعة من الحدود، كلُّ حدّ هو حاصل ضرب ثلاثة أعداد: المعامل، والمتغيّرُ أ مرفوعٌ لأسّ مُعيّن، والمتغيّرُ ب مرفوعٌ لأسّ مُعيّن، والمتغيّرات في النمط هي: المعامل، وأس الـ أ، وأس الـ ب. ونلاحظ أنّ عدد الحدود في كل مفكوك يساوي س + 1. لذا فنستطيع أن نخمّن أنّ الصيغة العامّة لمفكوك أيّ مقدار ثنائي هي:

[(قيمة المعامل)(أ لأس معين)(ب لأس معين)] + حدود أخرى بعدد س

إذن -الآن- كل ما علينا هو إيجاد قيمة كلٍّ من متغيرات النمط الثلاثة لكل حد معيّن، نبدأ أوّلا بالمعامل، إذا أعدت فك المقدار (أ + ب)^{3}، ولكن هذه المرّة، بضرب الأضلاع حسب ترتيب ثابت لجميع الحدود، وليكن الطول×العرض×الارتفاع، وبدون جمع الحدود أو استخدام الأسس:

(أ + ب)^{3} = أ أ أ + ب أ أ + أ ب أ + أ أ ب + ب ب أ + ب أ ب + أ ب ب + ب ب ب

جميع الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب الحروف أ أ ب

جميع الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب الحروف ب ب أ

تلاحظ أنّ المعامل يُمثّل عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب المتغيرات، فنحتاج الآن أن نعرف عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب عدد معين من المتغيرات، ولنحل هذه المشكلة؛ نتبع نفس الطريقة التي استخدمناها في بداية تحليلنا للمقدار الثنائي، أي نبدأ بعدد متغيرات أقل، ثم نحاول إيجاد عدد الطرق التي يمكن ترتيبها بها، ثم نزيد عدد المتغيرات، ثم نحاول إيجاد صيغة عامّة يمكننا بواسطتها إيجاد طرق ترتيب أي عدد من المتغيرات. وعدد الطرق التي يمكن بها ترتيب عدد معيّن من الأشياء يسمى "التباديل". كالتالي:

عدد الأحرف	جميع التراتيب الممكنة	التباديل
1	أ	1
2	أ ب، ب أ	2
3	أ ب جـ، أ جـ ب ب أ جـ، ب جـ أ جـ أ ب، جـ ب أ	6

قم باستنتاج الجدول السابق بنفسك؛ وستلاحظ أنّ تباديل ثلاثة أحرف، يمكن إيجادها، بتثبيت أحد الأحرف (الموضوع تحته خط)، ثم بتبديل أمكنة بقية الأحرف للحصول على جميع الترتيبات الممكنة، وبالتالي يمكن القول، بأنّ تباديل عدد مُعين من الأحرف، هو حاصل ضرب عددها وتباديل عدد الأحرف الأقل منه مباشرة، فإنّ تباديل ثلاثة أحرف يساوي: 3×(تباديل عدد الأحرف الأقل من 3 مباشرة) = 3×2×(تباديل عدد الأحرف الأقل من 2 مباشرة) = 3×2×1، وتختصر رياضيا 3! = 3×2×1؛ حيث علامة التعجّب ترمز لـ "مضروب" العدد، وهو حاصل ضرب العدد والأعداد الصحيحة الأقل منه إلى الواحد. وبالتالي فإنّ تباديل أربعة أحرف هو: 4! = 4×3×2×1 = 24.

ولكن يمكن أن يتكرّر نفس الحرف في مجموعة الأحرف، مثل (أ أ ب)، وإذا أوجدنا تباديلها نحصل على:

أ$_1$ أ$_2$ ب + ب أ$_1$ أ$_2$ + أ$_1$ ب أ$_2$ + أ$_2$ أ$_1$ ب + ب أ$_2$ أ$_1$ + أ$_2$ ب أ$_1$

أ$_1$ هي الأولى   أ$_2$ هي الأولى

فإذا أردنا عدم تكرار نفس الحرف، نقسّم تباديل العدد الكلي للأحرف على تباديل عدد الأحرف المتشابهة، لأنّه يظهر من المثال أنّ الحدود المكرّرة موزعة على تباديل الأحرف المتشابهة. ويسمى التباديل عند إهمال الترتيب أو التكرار: "التوافيق". فإنّ توافيق (أ أ ب) = $\frac{3!}{2!}$ = 3.

وبالمثل، فإنّ توافيق (أ أ أ ب ب جـ جـ جـ جـ) = $\frac{9!}{3!\,2!\,4!}$ = 1260.

فإنّ مُعامل أي حد يساوي توافيق عدد المتغيرات، حيث العدد الكلي للمتغيرات في كل حد يساوي أس المقدار الثنائي (س). وعدد تكرار كل متغير يساوي الأس الذي عليه.

بالنسبة لأس كل من الـ أ والـ ب، فلابد أنّك قد لاحظت -فعليًا- أنّ أسّ الـ أ يتناقص مع ترتيب الحد (ت)، وأسّ الـ ب، يتزايد معه، فيمكننا إيجاد قيمة حدّ معيّن بالمعادلة التالية:

$$\text{قيمة حدّ مُعيّن} = \frac{س!}{ت!(س-ت)!}\, أ^{س-ت}\, ب^{ت}$$

ولإيجاد كامل المفكوك، نجمع الصيغة السابقة من ت = 0، إلى ت = س.

$$\text{مج}_{ت=0}^{س} \frac{س!}{ت!(س-ت)!}\, أ^{س-ت}\, ب^{ت}$$

حيث أنّ الرمز (مج) يعني جمع المقدار الذي يليه مع نفسه عدد من المرات بتعويض في كل مرة قيمة لـ ت تبدأ من 0 وتتزايد بقيمة مقدارها الواحد الصحيح إلى ت = س.

ويمكن التأكد من صحة هذه النظرية باستخدام الآلة الحاسبة.